展開　説明編　問題

右の図 1 は横 $a+b$，縦 $c+d$ の長さの長方形を 4 つに分割したものである．この大きい長方形の面積は $(a+b)(c+d)$ である．一方で横を a と b，縦を c と d に分割した図形の面積はそれぞれ ac, ad, bc, bd なので大きい長方形の面積は $ac+ad+bc+bd$ となる．
以上の結果から、$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ が導かれる．
これはすべての展開公式の基本となるので覚えておきたい．

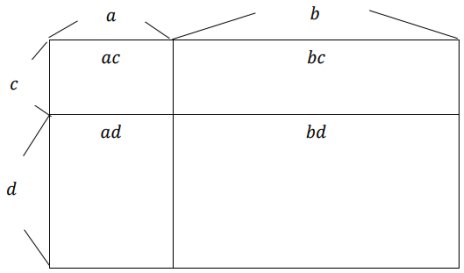

図 1　展開公式の導出図

この展開公式を用いて以下の公式が導かれる．

展開公式　一覧

$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$
$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

この公式を使えるようにした上で，かけ算の順序を入れ替えたり，式の共通部分を別の文字に置き換える（ひとまとまりとして見る）工夫をすると楽に計算できることがあることも頭に入れておきたい．

例題 1　$(x+3)(x-2)$ を展開せよ.

解答

$$\begin{aligned}(x+3)(x-2) &= x^2+(3-2)x+3\times(-2)\\ &= x^2+x-6\end{aligned}$$

例題 2　$(a+b+1)(a+b-1)$ を展開せよ.

解答

$a+b$ が両方のかっこ内に共通しているため 1 つのまとまりと見て考える.

$$\begin{aligned}(a+b+1)(a+b-1) &= \{(a+b)+1\}\{(a+b)-1\}\\ &= (a+b)^2-1^2\\ &= a^2+2ab+b^2-1\end{aligned}$$

公式確認問題

以下の式を展開せよ.

(1) $(s-t)^2$

(2) $(x+1)(x+2)$

(3) $(x+1)(x^2-x+1)$

(4) $(a+2)(a-2)$

(5) $(2x+1)(x-3)$