コーシーの不等式

主張

a_k, b_kをそれぞれ実数としたとき

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2\right)$$

等号成立は$a_1 : a_2 : \cdots : a_n = b_1 : b_2 : \cdots : b_n$

証明（数列）

１数学的帰納法を用いる

ｎ＝１のとき

$$(\text{右辺}) - (\text{左辺}) \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{1} {a_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{1} {b_k}^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{1} a_k b_k\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left({a_1}^2\right)\left({b_1}^2\right) - \left(a_1 b_1\right)^2 = 0$$

※ｎ＝２のとき

$$(\text{右辺}) - (\text{左辺}) \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{2} {a_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{2} {b_k}^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{2} a_k b_k\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left({a_1}^2 + {a_2}^2\right)\left({b_1}^2 + {b_2}^2\right) - \left(a_1 b_1 + a_2 b_2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left({a_1}^2{b_1}^2 + {a_1}^2{b_2}^2 + {a_2}^2{b_1}^2 + {a_2}^2{b_2}^2\right) - \left({a_1}^2{b_1}^2 + {a_2}^2{b_2}^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2\right)$$

$$= {a_1}^2{b_2}^2 + {a_2}^2{b_1}^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2$$

$$= \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right)^2 \geq 0$$

$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$即ち$a_1 b_2 = a_2 b_1 \Leftrightarrow a_1 : a_2 = b_1 : b_2$のとき確かに等号が成立する

※n ＝ 3のとき

$$(\text{右辺})-(\text{左辺}) \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{3} {a_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{3} {b_k}^2\right)-\left(\sum_{k=1}^{3} a_k b_k\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2\right)\left({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2\right)-\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left({a_1}^2{b_1}^2+{a_1}^2{b_2}^2+{a_1}^2{b_3}^2+{a_2}^2{b_1}^2+{a_2}^2{b_2}^2+{a_2}^2{b_3}^2+{a_3}^2{b_1}^2+{a_3}^2{b_2}^2+{a_3}^2{b_3}^2\right)$$

$$-\left({a_1}^2{b_1}^2+{a_2}^2{b_2}^2+{a_3}^2{b_3}^2+2a_1a_2b_1b_2+2a_2a_3b_2b_3+2a_3a_1b_3b_1\right)$$

$$={a_1}^2{b_2}^2+{a_1}^2{b_3}^2+{a_2}^2{b_1}^2+{a_2}^2{b_3}^2+{a_3}^2{b_1}^2+{a_3}^2{b_2}^2-2a_1a_2b_1b_2$$

$$-2a_2a_3b_2b_3-2a_3a_1b_3b_1$$

$$\Leftrightarrow \left({a_1}^2{b_2}^2-2a_1a_2b_1b_2+{a_2}^2{b_1}^2\right)+\left({a_2}^2{b_3}^2-2a_2a_3b_2b_3+{a_3}^2{b_2}^2\right)$$

$$+\left({a_3}^2{b_1}^2-2a_3a_1b_3b_1+{a_1}^2{b_3}^2\right)$$

$$=\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2+\left(a_2b_3-a_3b_2\right)^2+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)^2 \geq 0$$

$a_1b_2-a_2b_1=0$かつ$a_1b_2-a_2b_1=0$かつ$a_1b_2-a_2b_1=0$即ち

$a_1b_2=a_2b_1$かつ$a_2b_3=a_3b_2$かつ$a_3b_1=a_1b_3 \Leftrightarrow a_1:a_2:a_3=b_1:b_2:b_3$のとき

確かに等号が成立する

ｎ ＝ ｍのとき

C-S 不等式が満足すると仮定する

即ち

$$\left(\sum_{k=1}^{m} a_k^{\ 2}\right)\left(\sum_{k=1}^{m} b_k^{\ 2}\right)-\left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right)^2 \geq 0$$

ｎ ＝ ｍ＋ １のときについて考える

$$\left(\text{右辺}\right)\text{-}\left(\text{左辺}\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{\mathrm{m+1}} a_k^{\ 2}\right)\left(\sum_{k=1}^{\mathrm{m+1}} b_k^{\ 2}\right)-\left(\sum_{k=1}^{\mathrm{m+1}} a_k b_k\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{m} a_k^{\ 2}+a_{\mathrm{m+1}}^{\ \ 2}\right)\left(\sum_{k=1}^{m} b_k^{\ 2}+b_{\mathrm{m+1}}^{\ \ 2}\right)-\left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k+a_{\mathrm{m+1}}b_{\mathrm{m+1}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left\{\left(\sum_{k=1}^{m} a_k^{\ 2}\right)\left(\sum_{k=1}^{m} b_k^{\ 2}\right)+a_{\mathrm{m+1}}^{\ \ 2}\left(\sum_{k=1}^{m} b_k^{\ 2}\right)+b_{\mathrm{m+1}}^{\ \ 2}\left(\sum_{k=1}^{m} a_k^{\ 2}\right)+a_{\mathrm{m+1}}^{\ \ 2}b_{\mathrm{m+1}}^{\ \ 2}\right\}$$

$$-\left\{\left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right)^2+2a_{\mathrm{m+1}}b_{\mathrm{m+1}}\left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right)+a_{\mathrm{m+1}}^{\ \ 2}b_{\mathrm{m+1}}^{\ \ 2}\right\}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{m} a_k^{\ 2}\right)\left(\sum_{k=1}^{m} b_k^{\ 2}\right)-\left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right)^2+a_{\mathrm{m+1}}^{\ \ 2}\left(\sum_{k=1}^{m} b_k^{\ 2}\right)+b_{\mathrm{m+1}}^{\ \ 2}\left(\sum_{k=1}^{m} a_k^{\ 2}\right)$$

$$-2a_{\mathrm{m+1}}b_{\mathrm{m+1}}\left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right)$$

だが、仮定より

$$\left(\sum_{k=1}^{m} a_k^{\ 2}\right)\left(\sum_{k=1}^{m} b_k^{\ 2}\right)-\left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right)^2 \geq 0$$

加えて

$$a_{m+1}{}^{2}\left(\sum_{k=1}^{m} b_k{}^2\right)+b_{m+1}{}^{2}\left(\sum_{k=1}^{m} a_k{}^2\right)-2a_{m+1}b_{m+1}\left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m} a_{m+1}{}^2 b_k{}^2+\sum_{k=1}^{m} a_k{}^2 b_{m+1}{}^2-\sum_{k=1}^{m} 2a_{m+1}b_{m+1}a_k b_k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m}\left(a_{m+1}{}^2 b_k{}^2-2a_{m+1}b_{m+1}a_k b_k+a_k{}^2 b_{m+1}{}^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m}(a_{m+1}b_k-a_k b_{m+1})^2 \geq 0$$

であるから

$$(\text{右辺})-(\text{左辺}) \geq 0$$

以上より全ての自然数nについてC − S不等式は満足した

2 二次方程式を考える

$$a_k \neq 0 \text{ である x の二次関数}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(a_k x - b_k\right)^2 \quad \text{について考える}$$

仮定より $f(x) \leq 0$

よって y ＝ $f(x)$ は x 軸と高々 1 つの交点を持つ

したがって二次方程式

$$f(x) \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) x^2 - 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) x + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) = 0$$

の判別式をＤとすると

$$\frac{D}{4} \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \leq 0$$

であるから

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

だが,ここで

$\frac{D}{4} = 0$即ち任意の x について$a_k x = b_k$を満足させる x が存在するとき等号が成立し

加えて$a_k = 0$ のときもこの条件に含まれることから

Ｃ－Ｓ不等式が確かに満足している

コーシーの不等式（一般形）

$\boxed{\text{主張}}$

任意の（内積空間に属する）２ベクトルに対して

$$\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)^{2}\leq\left|\overrightarrow{a}\right|^{2}\left|\overrightarrow{b}\right|^{2}$$

が満足する

$\boxed{\text{証明}}$

２ベクトルの成す角を θ とすると

$$-1\leq\cos\theta\leq 1$$

であるから

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta\leq\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|$

$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\leq\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|$

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)^{2}\leq\left|\overrightarrow{a}\right|^{2}\left|\overrightarrow{b}\right|^{2}$

$|\cos\theta|=1$　即ち $\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{b}$ で等号成立

以上より C-S 不等式が満足した

ここで定義より

$$\left|\overrightarrow{a}\right| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2} \qquad \left|\overrightarrow{b}\right| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k{}^2}$$

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

であるから

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k{}^2\right)$$

が得られる

※例えば空間のベクトルについて

$\overrightarrow{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right), \overrightarrow{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$ とすると

定義より

$\left|\overrightarrow{a}\right| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$ 、 $\left|\overrightarrow{b}\right| = \sqrt{b_x{}^2 + b_y{}^2 + b_z{}^2}$ 、$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

であるから

$$\left(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\right)^2 \leq \left(a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2\right)\left(b_x{}^2 + b_y{}^2 + b_z{}^2\right)$$

が確かに得られる

積分形

主張

閉区間$[a,b]$で定義された連続な２関数$f(x), g(x)$について、

$$\left\{\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right\}^2 \leq \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx \int_a^b \{g(x)\}^2\,dx$$

である

証明

$f(x) \neq 0$，$g(x) \neq 0$のとき、実数 t を用いて関数 $h(x)$を次のように定義する

$$h\left(t\right) = \int_a^b \{f(x)t - g(x)\}^2\,dx$$

仮定より $h\left(t\right) \leq 0$ 、したがって二次方程式

$$h\left(t\right) = \left[\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx\right] t^2 - 2\left\{\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right\} t + \left[\int_a^b \{g(x)\}^2\,dx\right] = 0$$

の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} \Leftrightarrow \left\{\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right\}^2 - \left[\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx\right]\left[\int_a^b \{g(x)\}^2\,dx\right] \leq 0$$

であるから

$$\left\{\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right\}^2 \leq \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx \int_a^b \{g(x)\}^2\,dx$$

である

ここで$f(x) = 0$，$g(x) = 0$ のとき

または$\frac{D}{4} = 0$ を満たす t が存在する

即ち　$f(x)t - g(x) = 0$

$\Leftrightarrow f(x)t = g(x)$を満たす実数 t が存在するとき

確かに等号が成立するため、C-S 不等式は満足している

Made by Writer1（Study by TMT）