第一種オイラー積分について

主張

$m,\ n$を自然数として

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m}(x-\beta)^{n}\,dx=\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}(-1)^{n}$$

証明

$$I_{m,n}=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m}(x-\beta)^{n}\,dx \text{として}$$

$$I_{m,n}\Leftrightarrow\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\frac{(x-\alpha)^{m+1}}{m+1}\right\}'(x-\beta)^{n}\,dx$$

$$=\left[\frac{(x-\alpha)^{m+1}}{m+1}(x-\beta)^{n}\right]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{(x-\alpha)^{m+1}}{m+1}\,n(x-\beta)^{n-1}\,dx$$

$$=\left[\frac{(x-\alpha)^{m+1}}{m+1}(x-\beta)^{n}\right]_{\alpha}^{\beta}-\frac{n}{m+1}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m+1}(x-\beta)^{n-1}\,dx$$

ここで　$m,\ n\in\mathbb{N}$　であるから

$$\left[\frac{(x-\alpha)^{m+1}}{m+1}(x-\beta)^{n}\right]_{\alpha}^{\beta}=\frac{(\beta-\alpha)^{m+1}}{m+1}(\beta-\beta)^{n}-\frac{(\alpha-\alpha)^{m+1}}{m+1}(\alpha-\beta)^{n}=0$$

したがって

$$I_{m,n}=-\frac{n}{m+1}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m+1}(x-\beta)^{n-1}\,dx=-\frac{n}{m+1}\,I_{m+1,n-1}$$

故に

$$I_{m,n}=\left(-\frac{n}{m+1}\right)\left(-\frac{n-1}{m+2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{m+n}\right)I_{m+n,0}$$

ところで

$$\left(-\frac{n}{m+1}\right)\left(-\frac{n-1}{m+2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{m+n}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{n!(-1)^{n}}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{m!}{m!}\times\frac{n!(-1)^{n}}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{m!\ n!(-1)^{n}}{1\cdots m(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{m!\ n!(-1)^{n}}{(m+n)!}$$

であり，また

$$I_{m+n,0}\Leftrightarrow\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m+n}(x-\beta)^{0}\,dx$$

$$\Leftrightarrow\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m+n}\,dx$$

$$=\left[\frac{(x-\alpha)^{m+n+1}}{m+n+1}\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)^{m+n+1}}{m+n+1}-\frac{(\alpha-\alpha)^{m+n+1}}{m+n+1}$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)^{m+n+1}}{m+n+1}$$

であるから

$$I_{m,n} = \left(-\frac{n}{m+1}\right)\left(-\frac{n-1}{m+2}\right)\cdot\cdot\cdot\left(-\frac{1}{m+n}\right) I_{m+n,0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m!\,n!\,(-1)^{n}}{(m+n)!}\times\frac{(\beta-\alpha)^{m+n+1}}{m+n+1}$$

$$=\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}(-1)^{n}$$

以上より

$m, n \in \mathbb{N}$ で常に

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m}(x-\beta)^{n}\,dx = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}(-1)^{n}$$

であることが満足した

※$\alpha=0$，$\beta=1$ として, 両辺$(-1)^{n}$を掛けると

$$\int_{0}^{1} x^{m}(1-x)^{n}\,dx = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$$

となるが，これはベータ関数の積分と呼ばれる.

この場合は第一種オイラー積分に含まれる為，省略した.

Made by Writer1(Study by TMT)